

Table des matières

Introduction	4
1 Préliminaires	6
1.1 Généralités et définitions sur les EDPs	6
1.1.1 Equation différentielle aux dérivées partielle :	6
1.1.2 Classification des EDPs linéaires du second ordre	7
1.1.3 Problème mathématique aux dérivées partielles	8
1.1.4 Solution classique de quelques EDPs	9
1.2 Les méthodes numériques pour résoudre un problème d'EDP : . .	11
1.2.1 Caractérisation des méthodes numériques	11
1.2.2 Procédure pour l'application des techniques de simulation numérique pour la solution de problèmes.	12
1.2.3 Le schéma numérique :	12
1.2.4 La stabilité numérique, la convergence et la consistance. .	13
1.2.5 Existence et l'unicité de la solution pour l'EDP.	13
2 Résolution numérique des différentes classes d'EDPs par diffé- rences finies	19
2.1 Principe de la méthode	20
2.1.1 Discrétisation de l'EDP	20
2.1.2 Approximation de l'EDP	20
2.2 Résolution numérique d'EDPs par différences finis	22
2.2.1 Résolution d'une EDP de type elliptique :	22
2.2.2 Résolution d'une EDP de type parabolique	28

2.2.3	Résolution d'une EDP hyperbolique	39
3	Résolution numérique par la méthode des éléments finis	45
3.1	Principe de la méthode	46
3.2	Résolution numérique par éléments finis en une dimension : . . .	46
3.2.1	Choix des fonctions $\phi_i(x)$ éléments finis.	48
3.2.2	Application numérique :	50

Notations

$C(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions continues sur \mathbb{R} .

$C^m(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions m fois continues dérivables sur \mathbb{R} .

$C^\infty(\mathbb{R})$: L'espace des fonctions infiniment continues dérivables sur \mathbb{R} .

L^2 : L'espace de Hilbert

H : L'espace de Sobolev.

$D(\Omega)$: L'espace régulier (défini sur un espace ouvert Ω).

(ou $C_0^\infty(\mathbb{R})$ L'espace régulier des fonctions à support compact).

$L^1(\Omega) : \{u(x) / \int_\Omega |u(x)| dx < \infty, \text{ fonctions intégrables} \}$.

$L^2(\mathbb{R}) : \{u(x) / \langle u(x), u(x) \rangle = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^2 dx < \infty, \text{ fonctions carrées intégrables} \}$.

$L^2(\mathbb{C}) : \{u(x) / \langle u(x), v(x) \rangle = \int_{\mathbb{C}} u(x) \cdot \overline{v(x)} dx < \infty \}$.

$L^p(\Omega) : \{u / \|u\|_{L^p(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty \}$.

$L^\infty(\Omega) : \{u(x) / \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |u(x)| < +\infty, \text{ fonctions Lebesgue-mesurables} \}$.

Les espaces normés précédents sont des espaces de Banach.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. $\|x\| = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)^{1/2}$,

$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$. Produit scalaire entre u et v . (ou (u, v))

$u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\|u\|$: Norme de u

$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n$ (Gradient)

$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \in \mathbb{R}$ (Laplacien)

$\mathcal{F}(u)(\xi) = \hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx$ (Transformation de Fourier).

$\mathcal{F}^{-1}(\hat{u})(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$ (Inverse de la transformation de Fourier).

$\mathcal{F}(u.v)(\xi) = \mathcal{F}(u)(\xi) * \mathcal{F}(v)(\xi)$ (Produit de convolution).

$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(x-y) v(y) dy$.

$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma(x)$. (Formule de Green).

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans la théorie de la gravitation ou de l'électromagnétisme (exemple : les équations de Maxwell). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images et les finances. Les équations les plus importantes de la relativité générale et de la mécanique quantique sont également des EDPs. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans les domaines cités précédemment. Nous citons comme exemples :

- L'équation d'ondes décrivant les phénomènes de propagation des ondes dans des milieux physiques donnée par : $\Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, c représente la célérité pour le cas de la lumière ou la vitesse de propagation de l'onde u .
- L'équation de Fourier ou équation de la chaleur qui décrit l'évolution de la température en fonction du temps et de l'espace, écrite sous la forme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t}$, où α est appelé diffusivité thermique du milieu.

La résolution de certains EDP conduit à des solutions analytiques bien connues, toutefois un nombre important d'autres équations existent sans solutions analytiques. Les équations qui doivent être prises en considération pour une réaliste description des processus, sont en général tellement complexe. C'est dans cette objectif que les recherches se sont penchées sur les méthodes numériques pour arriver à approximer les solutions de ces équations. Pour cela on donne quelques méthodes numériques qui permettront de trouver une solution

approchée de l'EDP. Ainsi des approches théoriques et expérimentales ont été entreprises ces dernières années telles que les techniques de simulation numérique largement utilisées dans les disciplines scientifique. Parmi les méthodes numériques les plus utilisées la méthode des éléments finis associée à Courant, qui en a créé les fondements mathématique dans les années 1940 et l'appliquer à des domaines variés de la physique. La terminologie «élément finis » a été introduite par Clough en 1960 et la méthode des différences finies qui semble la plus intuitive pour l'approximation des solution aux dérivées partielles et la méthode des volumes finis. Ce sont les trois grandes méthodes numériques les plus utilisées et nous allons restreindre notre champ d'étude aux deux premières méthodes. Notons que l'algorithme de résolution dépend très étroitement du type du problème posé. On exigera que l'équation satisfasse quelques propriétés comme la linéarité pour que la résolution soit possible.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous donnerons quelques résultats de base qui serviront dans les chapitres suivants. On rappellera, en particulier, la solution analytique de quelque problèmes d'EDPs. Des notions de stabilité numérique et la consistance et la convergence d'une méthode numérique et finalement on donne le théorème de Lax-Milgram qui concerne l'existence et l'unicité de la solution de l'EDP.

1.1 Généralités et définitions sur les EDPs

1.1.1 Equation différentielle aux dérivées partielles :

Définition 1.1.1

Une EDP est une équation dont les solutions sont des fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante u , des variables indépendantes $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme

$$F\left(t, x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}, \dots\right) = 0 \quad (1.1)$$

L'EDP est dite linéaire si l'équation précédente écrite sous forme $Lu = 0$ avec L un opérateur différentielle linéaire i.e $L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L u_1 + c_2 L u_2$.

Par contre l'EDP est dite non linéaire si L est non linéaire par exemple :
l'équation de chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

Cette équation est une EDP linéaire avec $L = \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, et l'équation de Burger est définie par :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.3)$$

C'est une EDP non linéaire.

1.1.2 Classification des EDPs linéaires du second ordre

Soit $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, une EDP linéaire du second ordre, elle est donnée sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + Cu = G(x) \quad (1.4)$$

Avec $A_{i,j}(x)$, B_i , C , G des fonctions indépendantes de u ne s'annulant pas toutes simultanément dans \mathbb{R}^n , en particulier une EDP linéaire du second ordre à deux variables sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sous la forme :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) + f(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad (1.5)$$

$$\Delta = B^2(x, y) - 4A(x, y)C(x, y).$$

- * Si $\Delta < 0$, on a une EDP de type elliptique.
- * Si $\Delta > 0$, on a une EDP de type hyperbolique.
- * Si $\Delta = 0$, on a une EDP de type parabolique.

La classification des EDP d'ordre 2 s'étend au cas où il y a plus de deux variables indépendantes. Soit l'EDP $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + B(X, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}) = 0$ ou B ne contient pas de dérivées secondes. On considère la matrice $A = [a_{ij}]$ contenant des coefficients de plus haut degré de l'EDP. Le signe des valeurs propres de A indique le type d'équation :

- * Si toutes les valeurs propres de A sont de même signe et non nulles, l'équation est dite elliptique.

- * Si au moins deux v.p. de signes opposés, mais pas de v.p. nulle, l'équation est dite hyperbolique.
- * Si au moins une valeur propre est nulle, l'équation est dite parabolique.

1.1.3 Problème mathématique aux dérivées partielles

Définition 1.1.2

Un problème mathématique aux dérivées partielles c'est un problème qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} F\left(t, x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = f \\ \text{avec conditions} \end{cases} \quad (1.6)$$

Exemples :

1. le problème de Cauchy (donné avec condition initiale) :

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u = f \\ u(x, 0) = \varphi_0(x) \text{ avec } x \in \Omega \end{cases}$$

2. Le problème mixte (donné avec condition initiale et condition aux limite) :

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u = f \\ u(x, 0) = \varphi_0(x) \text{ avec } x \in [a, b] \\ u(a, t) = u(b, t) = \alpha \end{cases} \quad (1.7)$$

3. Le problème de Dirichlet non homogène (donné avec la condition aux limite) :

$$\begin{cases} -\Delta u(t, x) + c(x).u(t, x) = f(t, x) \quad x \in \Omega \\ u(t, x) = \beta \quad , x \in \Gamma \text{ (} \Gamma \text{ est la frontière de } \Omega \text{)} \end{cases} \quad (1.8)$$

4. Le problème de Neumann non homogène (donné avec la condition sur la dérivée) :

$$\begin{cases} -\Delta u(x, t) + c(x, t).u(x, t) = f(x, t) \quad x \in \Omega, t \in \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) = g(x) \quad , x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.9)$$

Définition 1.1.3

Un problème est dit bien posé est un problème qui admet mathématiquement une solution unique dépendant de façon continue des conditions du problème. i.e vérifie trois condition (l'existence, l'unicité de la solution et la stabilité).

Définition 1.1.4

Un problème est dit mal posé si la solution de ce problème vérifie l'équation sans vérifier l'une des conditions du problème, par exemple :

$$\begin{cases} u''(x) = 0 \\ u'(a) = \alpha, u'(b) = \beta \quad (\alpha \neq \beta) \end{cases} \quad (1.10)$$

La solution de ce problème est de la forme : $u(x) = Ax + B$. À partir des conditions du problème : $u'(a) = A = \alpha$ et $u'(b) = A = \beta$ ce qui est contradictoire.

1.1.4 Solution classique de quelques EDPs**a) Solution classique d'une équation hyperbolique : l'équation de transport**

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R} \quad t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.11)$$

Ou c est la vitesse et u_0 est une fonction donnée dans $C^1(\mathbb{R})$. Du fait que des dérivées d'ordre 1 interviennent dans l'équation du problème (1.11), on cherche une solution $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$. Dans ce cas, il est possible de voir que la solution u reste constante le long de la courbe paramétrique (C_ξ) définie par $(C_\xi) = \{(x(t), t), t \in \mathbb{R}^+ : x'(t) = c, x(0) = \xi\}$ (ou $\xi \in \mathbb{R}$). En effet, la fonction f définie par $f(t) = u(x(t), t)$ ($t \in \mathbb{R}^+$) de classe C^1 par composition est telle que :

$$f'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + x'(t) \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \quad (1.12)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) = 0 \quad (1.13)$$

Nous avons ainsi $u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(\xi)$. À présent, pour tout couple $(x, t) \in (C_\xi)$ on donnera la valeur de la solution de (1.11) sous forme

$u(x, t) = u_0(\xi)$. Dans notre cas $x'(t) = c$ fournit $x(t) = ct + \xi$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $(x, t) \in (C_\xi)$ si et seulement si $x = ct + \xi$. Pour terminer on a la proposition suivante :

Proposition 1.1.1

La solution du problème(1.11) est donnée par :

$$u(x, t) = u_0(x - ct) \quad \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad (1.14)$$

Cette méthode est connue sous le nom de méthode des caractéristiques. Les courbes (C_ξ) sont alors les courbes caractéristiques liées à l'équation de transport et le point ξ vérifiant $(x, t) \in (C_\xi)$ est appelé pied de la caractéristique passant par (x, t) . Ainsi, (C_ξ) est la courbe caractéristique du pied ξ . La relation (1.14) montre que la valeur de la solution en le couple (x, t) ne dépend en fait que de la donnée de Cauchy en u_0 en $\xi = x - ct$.

Preuve. (Voir [6]proposition 3.1.1. pour la démonstration on utilise la transformation de Fourier, comme on va le faire ci dessous dans l'équation de la chaleur). ■

b) Solution classique d'une équation parabolique (l'équation de chaleur) :

Nous nous intéressons maintenant à la résolution du problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \alpha \Delta u(x, t) = 0 & x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+, \alpha > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.15)$$

$u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. On cherche ici une solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ en temps et en espace. Nous utilisons la méthode de la transformée de Fourier, en supposant que u et toutes ses dérivées admettent à tout instant des transformées de Fourier (soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$). Par intégration deux fois par partie on trouve que la fonction \hat{u} vérifie l'équation différentielle.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)\right) &= \mathcal{F}(\alpha \Delta u(x, t)) & (1.16) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, t) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha \Delta u(x, t) e^{-ix\xi} dx = \alpha (i \|\xi\|)^2 \hat{u}(\xi, t) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \hat{u}(\xi, t) &= -\alpha \|\xi\|^2 \hat{u}(\xi, t) \quad (\|\cdot\| \text{ car } \xi \in \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Avec la condition initiale $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi)$ pour ξ dans \mathbb{R}^n . On a donc explicitement à tout temps :

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-\alpha \|\xi\|^2 t} \hat{u}_0(\xi) \quad (1.17)$$

On pose $g_t(\xi) = e^{-\alpha \|\xi\|^2 t}$, alors :

$$\begin{aligned} u(., t) &= \mathcal{F}_x^{-1} \hat{u}(., t) = \mathcal{F}_x^{-1}(g_t \cdot \hat{u}_0) \\ &= \mathcal{F}_x^{-1}(g_t) * \mathcal{F}_x^{-1}(\hat{u}_0) = \mathcal{F}_x^{-1}(g_t) * u_0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

La transformée de Fourier inverse de la fonction g_t est donnée par :

$$\mathcal{F}_x^{-1}(g_t(x)) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{n/2}} e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}} \quad (1.19)$$

Proposition 1.1.2

La fonction u définie sur $\mathbb{R}^n \times]0, +\infty[$ par

$$u(x, t) = \frac{1}{(4\pi\alpha t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|y\|^2}{4\alpha t}} u_0(x - y) dy \quad (1.20)$$

Est la solution du problème (1.15). La fonction $E(x, t) = e^{-\frac{\|x\|^2}{4\alpha t}} / (4\pi\alpha t)^{n/2}$ est appelée noyau de la chaleur sur \mathbb{R}^n . Elle vérifie l'équation de la chaleur pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $t > 0$.

1.2 Les méthodes numériques pour résoudre un problème d'EDP :

La résolution des EDPs numériquement consiste à approcher la solution d'une EDP avec plusieurs méthodes

1.2.1 Caractérisation des méthodes numériques

Pour illustrer les différents aspects qui jouent un rôle lors de l'utilisation des techniques numériques de simulation pour la solution des problèmes. La première étape consiste en la modélisation mathématique appropriée du processus à analyser, ou dans le cas où un ensemble de programmes existent, on utilise le modèle qui est le mieux adapté pour résoudre ce problème. Cet aspect, que

nous examinerons plus en détail dans les chapitres *II* et *III* , doit être considéré comme crucial, car la simulation en général ne donnera pas des résultats fiables, si elle n'est pas fondée sur un modèle adéquat. Le problème continu qui résulte de la modélisation en général des systèmes d'équations différentielles doit alors être convenablement approché par un problème discret.

1.2.2 Procédure pour l'application des techniques de simulation numérique pour la solution de problèmes.

Le processus, qui est appelé discrétisation, consiste principalement à deux tâches : la discrétisation du domaine du problème, la discrétisation des équations. La discrétisation du domaine du problème, qui est abordée dans le chapitre *II*, se rapproche du domaine continu (dans l'espace et le temps) par un nombre fini de sous-domaines, dans lequel les valeurs numériques d'inconnues est une quantité déterminée. L'ensemble de relations pour le calcul de ces valeurs seront obtenues par la discrétisation des équations, ce qui se rapproche des systèmes continus. Contrairement à une solution analytique, la solution numérique génère donc un ensemble de valeurs associées à la discrétisation du domaine du problème à partir de laquelle l'approximation de la solution peut être construite. Il existe principalement trois approches différentes disponibles pour la procédure de discrétisation : la méthode de volumes finis, la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis et on s'intéressera plus aux deux dernières méthodes dans le chapitre *II* et *III* (respectivement).

1.2.3 Le schéma numérique :

Il est obtenu à partir la discrétisation du domaine et la discrétisation de l'équation à partir de l'approximation des dérivées partielles ou moyen des développements de Taylor.

1.2.4 La stabilité numérique, la convergence et la consistance.

Une fois le schéma discret choisi, il sera nécessaire de le résoudre. Le processus de résolution, à la vue des équations sera la plupart du temps itératif. On calculera les valeurs de u de proche en proche. Une valeur donnée de u sera donc calculée en utilisant le résultat du calcul d'autres valeurs de u . Les erreurs arrondies étant inévitables sur machine,

Définition 1.2.1

Une méthode numérique est stable si ces erreurs ne s'amplifient pas (trop) au cours du calcul.

Définition 1.2.2

Une méthode numérique est consistante si l'erreur de discrétisation de l'équation tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation tend vers 0.

Définition 1.2.3

La convergence d'un schéma numérique est une propriété théorique globale assurant que l'écart (au sens d'une norme) entre la solution approchée et la solution exacte tend vers 0 lorsque le pas de discrétisation tend vers 0.

Théorème 1.2.1

(Théorème de Lax) : Le schéma numérique est convergent si et seulement s'il est consistant et stable .

Preuve. (voir [3] Théorème 2.8) ■

1.2.5 Existence et l'unicité de la solution pour l'EDP.

Espace de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du 20^{ème} siècle et ont permis de résoudre un nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles restés sans réponse jusque là. Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles. (soit $\Omega \in \mathbb{R}^3$)

L'espace $H^1(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$

Définition 1.2.4

On note $H^1(\Omega)$ l'espace linéaire fonctionnel défini par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\} \quad (1.21)$$

Que l'on munit du produit scalaire noté $((u, w))_{1,\Omega}$:

$$((u, w))_{1,\Omega} = \int_{\Omega} (uw + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_j}) dx \quad (1.22)$$

Et par le fait même d'une norme induite :

$$\|u\|_{1,\Omega} = ((u, u))_{1,\Omega}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \left(\sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 \right) \right) dx \right)^{1/2} \quad (1.23)$$

Définition 1.2.5

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme étant la fermeture de $D(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$. Ainsi, pour chaque $u \in H_0^1(\Omega)$, il existe une suite de fonctions $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ telles que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|u - u_i\|_{1,\Omega} = 0 \quad (1.24)$$

Les fonctions de $H_0^1(\Omega)$ s'annulent donc au bord et on peut écrire :

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / u = 0 \text{ sur } \Gamma\} \quad (1.25)$$

On peut aussi définir :

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) / u = 0 \text{ sur } \Gamma_0\} \quad (1.26)$$

Où Γ_0 est une partie de la frontière Γ du domaine Ω . En dimension 1, on a par exemple :

$$H^1(]a, b[) = \{u \in L^2(]a, b[) / u' \in L^2(]a, b[)\} \quad (1.27)$$

Et

$$\begin{aligned} H_0^1(]a, b[) &= \{u \in H^1(]a, b[) / u(a) = u(b) = 0\} \\ H_{\Gamma_0}^1(]a, b[) &= \{u \in H^1(]a, b[) / u(a) = 0 \text{ ou } u(b) = 0\} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Définition 1.2.6

On note $H^2(\Omega)$ l'espace linéaire fonctionnel défini par :

$$H^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq 3 \right\} \quad (1.29)$$

Que l'on munit du produit scalaire noté $((u, w))_{2,\Omega}$:

$$((u, w))_{2,\Omega} = \int_{\Omega} \left(uw + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) + \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right) dx \quad (1.30)$$

Et par le fait même d'une norme induite

$$\|u\|_{2,\Omega} = \left(\int_{\Omega} \left(u^2 + \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) + \left(\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 \right) \right) dx \right)^{1/2} \quad (1.31)$$

L'espace $H_0^2(\Omega)$ est défini par :

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) / u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \right\} \quad (1.32)$$

Où $\frac{\partial u}{\partial n}$ est défini sur la frontière Γ est appelée la trace normale de u au bord que l'on note $\gamma_1(u)$. Rappelons que :

$$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n \quad (1.33)$$

Où n est le vecteur normal unitaire à Γ .

Définition 1.2.7

On appelle forme linéaire une fonction linéaire sur un espace de Hilbert V qui vérifie les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} l(\lambda u) &= \lambda l(u) & \forall v \in V \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ l(u\lambda_1 + v\lambda_2) &= \lambda_1 l(u) + \lambda_2 l(v) & \forall u, v \in V \end{aligned} \quad (1.34)$$

Définition 1.2.8

Une forme linéaire l sur l'espace de Hilbert V munie de la norme $\|\cdot\|_V$, est dite continue s'il existe une constante C telle que :

$$|l(u)| \leq C \cdot \|u\|_V \quad \forall u \in V \quad (1.35)$$

Définition 1.2.9

L'ensemble de toutes les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert V est appelé espace dual de V et est noté V' .

Définition 1.2.10

Une forme bilinéaire sur un espace de Hilbert V est une application $a(.,.) : V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) vérifiant :

$$\begin{aligned} a(\alpha u_1 + \beta u_2, w) &= \alpha a(u_1, w) + \beta a(u_2, w). \forall u_1, u_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ a(u, \alpha w_1 + \beta w_2) &= \alpha a(u, w_1) + \beta a(u, w_2). \forall w_1, w_2 \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Une forme bilinéaire est donc linéaire en chacun de ses 2 arguments.

Définition 1.2.11

Une forme bilinéaire a est dite continue sur $V \times V$ s'il existe une constante C telle que :

$$a(u, w) \leq C \|u\|_V \|w\|_V \quad (1.37)$$

Définition 1.2.12

Une forme bilinéaire est dite coercive ou elliptique s'il existe une constante strictement positive C telle que :

$$a(u, u) \geq C \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \quad (1.38)$$

Application : (Un problème modèle) On se propose de résoudre le problème de Dirichlet suivant : trouver la solution $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \Gamma \end{cases} \quad (1.39)$$

Nous supposons que l'ouvert Ω est borné de frontière lipchitzienne et que $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$. On souhaite d'abord répondre aux questions suivantes :

1. Ce problème admet-il une solution ? Si oui dans quel espace ?
2. Si une telle solution existe, est-elle unique ?
3. Si oui, dépend-elle continument de la donnée f ?

S'il est possible de répondre de manière positive à toutes ces questions, on dit que le problème est «bien posé au sens d'Hadamard». Sinon le problème est mal posé donc il admet une solution faible et dans ce cas on fait une stratégie qui consiste à transformer le problème en l'écrivant sous forme variationnelle.

Formulation variationnelle du problème Supposons que u soit une solution du problème (1.39) ayant la régularité suivante $u \in H^2(\Omega)$. Soit $v \in H^1(\Omega)$ quelconque. Multiplions l'équation du problème (1.39) par $v(x)$ et intégrons sur Ω . On vérifie que cette intégration est possible, on a donc :

$$\int_{\Omega} -\Delta u(x)v(x)dx + \int_{\Omega} c(x)v(x)u(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (1.40)$$

On utilise ensuite la formule de Green pour en déduire :

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} \gamma_1 u(x) \gamma_0 v(x) d\Gamma(x) + \int_{\Omega} c(x)v(x)u(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad (1.41)$$

Supposons maintenant que $\gamma_0 v(x) = 0$ (i.e. que $v \in H_0^1(\Omega)$) remarquons que cette propriété est satisfaite par la solution u), il reste alors : Pour tout $v \in V$, $A(u, v) = L(v)$ ou :

$$\begin{aligned} V &= H_0^1(\Omega) \\ A(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} c(x)v(x)u(x)dx \\ L(v) &= \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \end{aligned} \quad (1.42)$$

Le problème : Trouver $u \in V$ tel que (1.42) ait lieu est appelé « formulation variationnelle » du problème (1.39). Dans cette formulation on remarque que l'espace V est un Hilbert et que la forme A est bilinéaire et que la forme L est linéaire, pour l'étude du problème variationnel. Supposons dans un premier temps avoir résolu ce problème (la résolution résultera du Théorème de Lax-Milgram). La solution du problème variationnel est aussi une solution du problème continu comme illustré dans la proposition suivante :

Proposition 1.2.1

Soit $u \in H^2(\Omega)$. Alors u est une solution du problème aux limites (1.39) si et seulement si elle est solution du problème variationnel (1.42)

Preuve. (Voir [3]proposition 1.1) ■

Théorème 1.2.2

(Théorème de Riesz) Soit H un espace de Sobolev et L une forme linéaire continue sur H . Alors, il existe un unique élément u de H tel que : pour tout $v \in H$

$$L(v) = (u, v) \quad (1.43)$$

Preuve. (Voir [3]Théorème 3.2) ■

Théorème 1.2.3

(Théorème de Lax-Milgram) Soit V un espace de Hilbert réel, A est une forme bilinéaire, continue et coercive sur $V \times V$ et L est une forme linéaire continue sur V . Alors il existe un unique élément u de V solution du problème variationnel (1.42).

Preuve. (est basée sur le théorème des projections [3] Théorème 3.1 et le Théorème de Riesz [3]Théorème 3.2). ■

Chapitre 2

Résolution numérique des différentes classes d'EDPs par différences finies

On s'intéresse dans ce chapitre à la résolution numérique des quelques EDPs qui consiste à donner une solution approchée à l'aide de la méthode des différences finies représentée dans la discrétisation du domaine de travail et la discrétisation de l'équation à partir du développement de Taylor. On dispose aussi deux méthodes associées aux différences finies pour la résolution associée à l'équation elliptique représentée dans l'équation Laplace. Ces méthodes sont la méthode directe et la méthode de relaxation . On donne ensuite quelques schémas possibles explicites et implicites qui peuvent donner une solution approchée d'une équation de type parabolique représentée dans l'équation de chaleur. Nous observons à travers les graphes que les schémas explicites restent stables si le pas de discrétisation reste inférieur à $1/2c$, sinon les schémas seront instables contrairement aux schémas implicites qui sont complexe mais qui demeurent toujours stables. Finalement on a considéré plusieurs schémas numériques pour résoudre l'équation de transport et des ondes qui sont des équations hyperboliques. On utilise pour la notion de stabilité des schémas, la stabilité au sens de la norme l^2 et la condition **CFL**.

2.1 Principe de la méthode

En analyse numérique, la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'EDPs qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. En apparence, cette méthode procède en deux étapes, d'une part la discrétisation par différences finies des opérateurs de dérivation /différentiation, d'autre part la convergence du schéma numérique ainsi obtenu lorsque la distance entre les points diminue.

2.1.1 Discrétisation de l'EDP

Soit h le pas de discrétisation. Prenons par exemple un domaine de \mathbb{R}^2 . soit $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$ la discrétisation de chaque intervalle se fait comme suit : (En prend h_x le pas de discrétisation de $[a, b]$)

$$h_x = \frac{(b-a)}{n_x} \quad (n_x \text{ étant le nombre d'intervalles dans } [a, b]) \quad (2.1)$$

on note par : $x(i) = x_i = a + i h_x, i = 0, 1, 2, \dots, n_x$

Remarque 2.1.1

$x_{i+1} = a + (i+1)h_x = a + i h_x + h_x = x_i + h_x$. nous désignons $x_i + h_x$, $x_i - h_x$, successivement par x_{i+1} et x_{i-1} .

2.1.2 Approximation de l'EDP

L'idée fondamentale consiste à utiliser la définition de la dérivée (supposée existe) de la fonction u en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par exemple en écrivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \lim_{h_x \rightarrow 0} \frac{u(x + h_x, y) - u(x, y)}{h_x} \quad (2.2)$$

On déduit que lorsque $h_x \lll 1$, le quotient $[u(x + h_x, y) - u(x, y)]/h_x$ constitue une approximation de la dérivée partielle première $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ par rapport à x au point (x, y) . Dans le sens où l'erreur commise dans cette approximation tend vers 0 quand $h_x \rightarrow 0$. Si la fonction est un peu plus régulière au voisinage

du point x , on peut même préciser cette erreur grâce à un développement de Taylor. En effet, en supposant u de classe C^2 au voisinage de x :

$$u(x + h_x, y) = u(x, y) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi, y) \quad (2.3)$$

Où $\xi \in]x, x + h_x[$. On déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $h_x > 0$, pour tout $h_x < h_0$ ($h_0 > 0$ donné), ou $C = \sup_{z \in [x, x+h_0]} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z, y)$

$$\left| \frac{u(x + h_x, y) - u(x, y)}{h_x} - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| \leq Ch_x \quad (2.4)$$

Définition 2.1.1

On dit qu'on a défini une approximation consistante d'ordre un de $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ au point x (ou approximation à droite). On dit de manière générale qu'on a une approximation consistante d'ordre p ($p > 0$) s'il existe une constante $C > 0$, indépendante de h_x , telle que l'erreur soit majorée par Ch_x^p . D'autres approximations sont possibles tel que le quotient $[u(x, y) - u(x + h_x, y)]/(h_x)$ (approximation à gauche). Une façon d'améliorer la précision consiste à « centrer » l'approximation, en faisant intervenir les points $x + h_x$ et $x - h_x$, i.e. en considérant le quotient suivant $[u(x + h_x, y) - u(x - h_x, y)]/(2h_x)$ dit approximation centrée. En effet, en supposant u de classe C^3 au voisinage du point x :

$$u(x + h_x, y) = u(x, y) + h_x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{h_x^3}{6} u_{xxx}(\xi^+, y) \quad (2.5)$$

$$u(x - h_x, y) = u(x, y) - h_x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h_x^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - \frac{h_x^3}{6} u_{xxx}(\xi^-, y) \quad (2.6)$$

Où $\xi^+ \in]x, x + h_x[$ et $\xi^- \in]x - h_x, x[$. En soustrayant (2.5) et (2.6) et grâce au théorème des valeurs intermédiaires on trouve :

$$\frac{u(x + h_x, y) - u(x - h_x, y)}{2h_x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{h_x^2}{6} u_{xxx}(\xi, y) \quad (2.7)$$

Où $\xi \in]x - h_x, x + h_x[$. On déduit l'erreur :

$$\left| \frac{u(x + h_x, y) - u(x - h_x, y)}{2h_x} - \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) \right| \leq Ch_x^2, \text{ ou } C = \sup_{z \in [x-h_0, x+h_0]} \frac{u_{xxx}(z, y)}{6} \quad (2.8)$$

Cette dernière approximation est une approximation d'ordre deux. Donc la précision de l'approximation dépend donc de la régularité de u . On définit la dérivée second de u par $[u(x + h_x, y) - 2u(x, y) + u(x - h_x, y)]/(h_x^2)$ c'est aussi une approximation d'ordre deux.

Lemme 2.1.1

Supposons que u de classe C^4 sur l'intervalle $[x - h_0, x + h_0]$ ($\forall h_0 > 0$), alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $h_x \in [0, h_0]$ on ait :

$$\left| \frac{u(x + h_x, y) - 2u(x, y) + u(x - h_x, y)}{h_x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \right| \leq Ch_x^2 \quad (2.9)$$

La dérivée seconde $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y)$ de $u(x, y)$ sera alors de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) \simeq \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{h_x^2} \quad (2.10)$$

Remarques :

1. On fait la même chose pour la dérivée partielle par rapport à y .
2. La dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y)$ de $u(x, y)$ sera de la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \simeq \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1}) + u(x_{i-1}, y_{j-1})}{4h_x h_y} \quad (2.11)$$

3. Notons par $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$, on à alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_x} && \text{est dit schéma à droite} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &\approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_x} && \text{est dit schéma à gauche} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &\approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} && \text{est dit schéma centré} \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.2 Résolution numérique d'EDPs par différences finis

2.2.1 Résolution d'une EDP de type elliptique :

Soit l'équation de Laplace suivant :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.13)$$

En utilisant (2.12) et (2.10) l'équation (2.13) devient :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \Leftrightarrow \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{h_y^2} \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n_x, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n_y \end{aligned} \quad (2.14)$$

Prenons le cas particulier $h = h_x = h_y$. (2.14) devient :

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \Leftrightarrow \frac{u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{h^2} = 0 \\ i &= 0, 1, 2, \dots, n_x, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n_y \end{aligned} \quad (2.15)$$

Remarque 2.2.1

A chaque étape nous remarquons que pour calculer la valeur de $u_{i,j}$ au point (x_i, y_i) nous avons besoin de connaître les points $u_{i-1,j}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i,j+1}$ comme l'indique le dessin suivant, c'est pour cela que nous appelons cette formule à 5 points qui peut être représentée comme suit :

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{Bmatrix} u_{i,j} = 0 \quad (2.16)$$

Exemple 2.2.1

Soit à résoudre le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ pour } (x, y) \in [0, 20] \times [0, 10] \\ u(x, 0) = u(x, 10) = u(0, y) = 0, u(20, y) = 100 \\ h_x = h_y = h \in \{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125\} \end{cases} \quad (2.17)$$

La résolution de ce problème peut se faire en choisissant deux méthodes de différences finies en faisant varier h . Ces méthodes sont : la méthode directe et la méthode de relaxation de Liebmann.

La résolution par la méthode directe

Cas où $h = 5$

On a : $h_x = \frac{(b-a)}{n_x}$, alors $n_x = \frac{20-0}{5} = 4$ de même $n_y = 2$. La grille maillée contient alors $(n_x + 1)(n_y + 1)$ mailles vu que nous avons à rajouter les points où $x_i = 0$ et ceux où $y_j = 0$ et les conditions aux limites nous donnent les images sur les bords, alors les points inconnus restent seulement ceux de l'intérieur du quadrillage. Le nombre d'inconnues est alors $(n_x - 1)(n_y - 1) = 3$. En substituant dans (2.15) avec les conditions de (2.17), on obtient le système de trois équations

à trois inconnues :

$$\begin{cases} -4u_{1,1} + u_{2,1} + 0u_{3,1} = 0 \\ 1u_{1,1} - 4u_{2,1} + 1u_{3,1} = 0 \\ 0u_{1,1} + u_{2,1} - 4u_{3,1} = -100 \end{cases} \quad (2.18)$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système matriciel $AU = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \\ u_{3,1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Avec la méthode de Crout LU , nous obtenons la solution :

$$U = \begin{pmatrix} 1.786 \\ 7.143 \\ 26.786 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Cas ou $h = 2.5$: Nous aurons : $n_x = 8$ et $n_y = 4$, ce qui donne $n = 21$ équations à 21 inconnues de la forme :

$$\begin{cases} -4u_{1,1} + u_{2,1} + 0u_{3,1} + \dots + u_{1,2} + \dots = 0 \\ 1u_{1,1} - 4u_{2,1} + 1u_{3,1} + 0u_{4,1} + \dots + u_{2,2} + \dots + 0u_{7,3} = 0 \\ \vdots \\ 0u_{1,1} + \dots + u_{6,1} - 4u_{7,1} + 0u_{1,2} + \dots + 1u_{7,2} + \dots + 0u_{7,3} = -100 \\ \vdots \\ 0u_{1,1} + \dots + 1u_{7,1} + \dots + 0u_{1,3} + 1u_{6,2} - 4u_{7,2} + 0u_{2,3} + \dots + 1u_{7,3} = -100 \\ \vdots \\ 0u_{1,1} + \dots + 1u_{7,2} + 0u_{1,3} + \dots + 1u_{6,3} - 4u_{7,3} = -100 \end{cases} \quad (2.21)$$

La condition aux limites nous a ramené à avoir la grille suivante dans la quelle nous allons chercher les inconnue de système (2.21). Nous transformons la matrice U en un vecteur v pour pouvoir bien résoudre le système sans erreur puisque la résolution du système $AU = B$ exige que U soit un vecteur. Ce qui

conduit au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} -4v_1 + v_2 + 0v_3 + \dots + v_8 + 0v_9 + \dots + 0v_{21} = 0 \\ 1v_1 - 4v_2 + 1v_3 + 0v_4 + \dots + v_9 + \dots + 0v_{21} = 0 \\ \vdots \\ 0v_1 + \dots + v_6 - 4v_7 + 0v_8 + \dots + 1v_{14} + 0v_{15} + \dots + 0v_{21} = -100 \\ v_1 + 0v_2 + \dots - 4v_8 + v_9 + 0v_{10} + \dots + v_{15} + 0v_{16} + \dots + 0v_{21} = 0 \\ \vdots \\ 0v_1 + \dots + v_7 + 0v_8 + \dots + v_{13} - 4v_{14} + 0v_{15} + \dots + 1v_{21} = -100 \\ \vdots \\ 0v_1 + \dots + 1v_{14} + 0v_{15} + \dots + 1v_{20} - 4v_{21} = -100 \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Il nous reste maintenant à résoudre le système matriciel suivant $Av = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \ddots & 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 1 & -4 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 0 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & 1 & -4 & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -100 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

L'utilisation de la méthode de Jacobi ou Gauss-Seidel nous donne la solution du système. Toutefois, nous adaptons la résolution directe. Les courbes qu'on obtient pour $h \in \{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125\}$ sont représentées ci dessous.

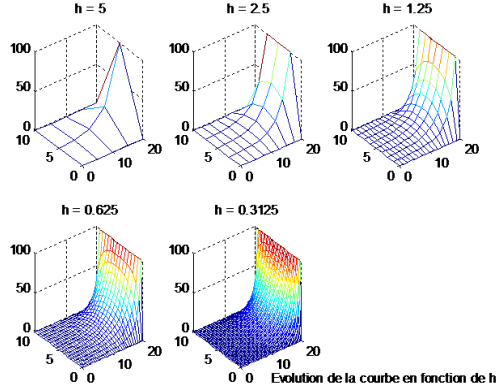


Figure 2.1 : méthode directe pour différentes valeurs du pas h .

Remarque 2.2.2

Malgré que cette méthode a pu nous donner une solution approchée de l'EDP $\Delta u = 0$, celle-ci est obtenue par une approximation de $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ par l'utilisation de la formule de Taylor tronquée à l'ordre 2. Nous avons donc commis une erreur de l'ordre de h^2 . Non seulement cette erreur commise est considérable mais le calcul des éléments du vecteur \vec{u} est de plus en plus coûteux en mémoire. Par exemple pour $h_x = h_y = h = 1.25$, la matrice $A \in M(105)$. La résolution de ce système matriciel avec A une matrice carrée $(105, 105)$ nécessite une mémoire considérable dans la machine. Or, pour approcher beaucoup plus la solution numérique vers la solution analytique, nous devons faire tendre $h \rightarrow 0$ pour qu'il soit très proche de la limite approximée par la méthode de Taylor.

Méthode de relaxation de Liebmann Pour remédier le problème précédemment posé, Liebmann a pensé à la méthode itérative de Gauss-Seidel puisque la matrice A est à diagonales strictement dominantes, i.e :

$$|A_{i,i}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |A_{i,j}|, \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (2.24)$$

La Méthode : Le schéma numérique obtenu à partir (2.15) donne :

$$\begin{aligned}
u_{i+1,j} - 4u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} &= 0 & (2.25) \\
\Leftrightarrow u_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{4} \\
\Leftrightarrow u_{i,j}^{k+1} &= \frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k}{4}
\end{aligned}$$

Cette méthode est appelée la méthode itérative de Liebmann. Une condition initiale est exigée, on peut aussi écrire :

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \left[\frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k}{4} \right] \quad (2.26)$$

Le terme entre crochets est appelé les résidus connu comme un ajustement de la valeur précédente $u_{i,j}^k$ pour avoir la valeur $u_{i,j}^{k+1}$.

Idée de Relaxation : Au lieu d'ajouter exactement les résidus, on ajoute un terme un peu plus grand en introduisant un facteur de relaxation ω compris entre 1 et 2, pour avoir la nouvelle relation

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \omega \left[\frac{u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i,j+1}^k}{4} \right] \quad (2.27)$$

ω Est appelé un optimum, et il est obtenu, dans les conditions de Dirichlet, par une estimation plus raisonnable comme étant la plus petite valeur des solutions de l'équation :

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{n_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n_y}\right) \right)^2 \omega^2 - 16\omega + 16 = 0 \quad (2.28)$$

La résolution de cette équation du second degré donne :

$$\omega_{opt} = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - \left(\cos\left(\frac{\pi}{n_x}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{n_y}\right) \right)^2}}. \quad (2.29)$$

Les courbes qu'on obtient pour $h \in \{5, 2.5, 1.25, 0.625, 0.3125, 0.15625\}$ sont représentées ci dessous.

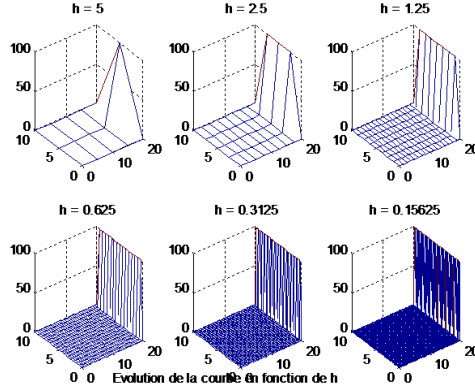


Figure 2.2 : Méthode de relaxation pour différentes valeurs du pas h

Remarque 2.2.3

Nous remarquons que les deux méthodes convergent et tendent à former une vraie courbe spatiale quand h tend vers zéro. Ce qui est en commun accord avec les approximations car si $h \ll 1$, les approximations de Taylor sont presque égales aux dérivées partielles respectives. Il faut donc tenir compte la valeur de h choisi. Il est aussi à noter qu'avec la méthode de relaxation le problème de mémoire n'est pas posé. Cette méthode de relaxation de Liebmann converge vite que la méthode directe, ceci se voit par comparaison simple des figures. Le choix de la méthode compte aussi plus pour mieux mener la résolution numérique d'une EDP.

2.2.2 Résolution d'une EDP de type parabolique

Soit le problème exprimé par l'équation de chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 \leq x \leq L \\ u(x, 0) = u_0(x) & t > 0 \\ u(0, t) = \alpha, u(L, t) = \lambda \end{cases} \quad (2.30)$$

Les Différents schémas pour l'équation de la chaleur :

Rappel de la notation spatiale et temporelle : Si la fonction prend comme variables le temps t_j et l'espace x_i, y_j, \dots par commodité du langage,

on notera $u(x_i, t_j)$ par u_i^j et par $u_{i,j}^k$ avec 2 dimensions de l'espace et une dimension du temps.

*** Schéma explicite :**

On prend dans ce schéma la dérivée à droite par rapport à t , donc le problème (2.30) devient :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} &= c \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_x^2} \\ \Leftrightarrow u_i^{j+1} &= u_i^j + c \frac{h_t}{h_x^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dans le schéma explicite on peut résoudre les équations qui sont égales au nombre d'inconnues c'est à dire chaque inconnue peut être trouvée comme suit :

$$\begin{aligned} \text{pour } j &= 0 \text{ en calcule le premier vecteur } u_i^1 \\ \text{pour } j &= 1 \text{ en calcule le premier vecteur } u_i^2 \\ &\vdots \\ &\text{ect} \end{aligned} \quad (2.32)$$

*** Schéma implicite :**

Dans ce schéma on prend :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h_x^2} \quad (2.33)$$

Et on prend la dérivée à droite par rapport à t , l'équation de (2.30) devient :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} = c \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h_x^2} \quad (2.34)$$

Ce qui est implique :

$$u_i^{j+1} = u_i^j + c \frac{h_t}{h_x^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) \quad (2.35)$$

Dans le schéma implicite pour calculer l'étape $j + 1$ on a seulement l'étape j , aussi le schéma implicite peut être écrit sous forme du système suivant :

$$KU^j = U^{j+1} \quad \forall i = 0, 1, \dots, n_x \quad (2.36)$$

*** Schéma de Grank Nicolson :**

Il est obtenu à partir des deux schémas précédents comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}}{h_x^2} & (\text{d'après s.implicit}) \quad (2.37) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_x^2} & (\text{d'après s.explicite})\end{aligned}$$

Par addition et simplification on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)}{2h_x^2} \quad (2.38)$$

Et on prend la dérivé à droit par rapport à t :

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} &= c \frac{(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)}{2h_x^2} \quad (2.39) \\ \Leftrightarrow u_i^{j+1} &= u_i^j + c \frac{h_t}{2h_x^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1} + u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)\end{aligned}$$

*** Schéma général :**

La représentation générale de ces schémas est de la forme :

$$\begin{aligned}u_i^{j+1} &= u_i^j + c \frac{h_t}{h_x^2} (\theta(u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + (1 - \theta)(u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j)) \\ \text{ou } \theta &\text{ est une variable telle que : } 0 \leq \theta \leq 1\end{aligned} \quad (2.40)$$

Si on considère le schéma centré par rapport à t on obtient le schéma de **DuFort-Frankel** :

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2h_t} = c \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - 2u_i^j}{h_x^2} \quad (2.41)$$

Soit la valeur de u_i^j laquelle est obtenue à partir (2.12) par la formule :

$$u_i^j = \frac{u_i^{j+1} + u_i^{j-1}}{2} \quad (2.42)$$

Donc (2.41) s'écrit sous la forme :

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} + c \frac{2h_t}{h_x^2} (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - u_i^{j+1} - u_i^{j-1}) \quad (2.43)$$

La convergence et la stabilité des schémas : Soit \tilde{u} la solution approchée obtenue à partir de la résolution numérique de l'équation de la chaleur. Les schémas ci dessous sont dits stables ou convergents si $\tilde{u} \mapsto u(x, t)$ quand $h_x, h_t \mapsto 0$ telle que $u(x, t)$, c'est la solution du problème continu (2.30). Théoriquement on ne peut pas démontrer la convergence car on ne connaît pas la solution du problème (2.30), mais on peut faire des équivalences.

Équivalence correspond à

1. consistence \Leftrightarrow la précision \Leftrightarrow l'ordre.
 2. La stabilité : Le schéma est dit stable si
- * $\forall h_x, h_t$ et $\forall n/nh_t \leq T$ ($h_t \leq \frac{T}{n}$).
 - * la solution du problème discret (la solution numérique) reste bornée pour une condition initiale bornée.

Exemple 2.2.2

Soit le problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , x \in [a, b], c = 1 \\ u(x, 0) = \sin(\alpha x) \\ u(a, t) = u(b, t) = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

On cherche la solution élémentaire de l'équation à partir de la méthode de séparation des variables, i.e on suppose que la solution $u(x, t)$ du problème (2.44) est de la forme :

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f(x)g(t) \\ \Leftrightarrow u(x, 0) &= g(0)f(x) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Par dérivation par rapport à deux variables puis simplification on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{f''(x)}{f(x)} = -\theta^2 \quad (\text{avec } \theta \text{ est une constante}) \\ \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} &= -\theta^2 \quad \text{et} \quad \frac{f''(x)}{f(x)} = -\theta^2 \\ \Leftrightarrow g(t) &= Ae^{-\theta^2 t} \quad \text{et} \quad f(x) = B \cos(\theta x) + C \sin(\theta x) \end{aligned} \quad (2.46)$$

D'après la condition du problème on a :

$$u(x, 0) = g(0)f(x) = \sin(\alpha x) \quad (A = C = 1, B = 0, \theta = \alpha) \quad (2.47)$$

Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= e^{-\alpha^2 t} \sin(\alpha x) \\
\Leftrightarrow u_i^j &= e^{-\alpha^2 j h_t} \sin(\alpha i h_x) \\
\Leftrightarrow u_i^j &= A^j \sin(\alpha i h_x) \quad (A^j = e^{-\alpha^2 j h_t})
\end{aligned} \tag{2.48}$$

La condition de stabilité indique que la solution discrète reste bornée pour une condition initiale bornée, alors pour que u_i^j soit bornée il faut que A^j soit bornée, car $|\sin(\alpha i h_x)| \leq 1$ ce qui implique $u_i^j \leq 1$ et donc il faut $A^j \leq 1$. On cherche dans ce cas les conditions qui vérifient la stabilité, pour un schéma explicite (2.31) :

$$A^{j+1} \sin(\alpha i h_x) = A^j \sin(\alpha i h_x) + A^j \frac{h_t}{h_x^2} (\sin(\alpha(i+1)h_x) - 2 \sin(\alpha i h_x) + \sin(\alpha(i-1)h_x)) \tag{2.49}$$

Par division par A^j et utilisons les relations trigonométriques on trouve :

$$\begin{aligned}
A^1 \sin(\alpha i h_x) &= \sin(\alpha i h_x) + \frac{h_t}{h_x^2} \left(2 \sin(\alpha i h_x) \left(-2 \sin^2 \left(\frac{\alpha h_x}{2} \right) \right) \right) \\
\Leftrightarrow A &= 1 + \frac{h_t}{h_x^2} \left(-4 \sin^2 \left(\frac{\alpha h_x}{2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Alors la condition sur A est $|A| \leq 1$. Posant $H = \frac{h_t}{h_x^2} (4 \sin^2 (\frac{\alpha h_x}{2}))$ on obtient :

$$\begin{aligned}
|A| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq 1 - H \leq 1 \\
\text{ce qui implique} \quad 1 - H &\geq -1 \\
\text{alors} \quad H &\leq 2 \Rightarrow \left(\frac{h_t}{h_x^2} 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha h_x}{2} \right) \right) \leq 2 \\
\text{d'où} \quad \frac{h_t}{h_x^2} &\leq \frac{1}{2} \quad (\text{car } \sin^2 \left(\frac{\alpha h_x}{2} \right) \leq 1)
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Finalement on trouve la condition de stabilité pour le schéma explicite de la condition de Dirichlet qui est stable pour $\frac{h_t}{h_x^2} \leq \frac{1}{2c}$ (avec $c = 1$). Pour cela le schéma explicite est faible à cause de la condition de stabilité parce qu'elle impose une condition sur h_t et h_x et cela crée un problème sur le pas. Cette condition dit qu'il faut que h_x ne soit pas très petite pour que le schéma sera stable. Contrairement aux schémas implicites elle est toujours stable $\forall h_t$ et $\forall h_x$.

Exemple 2.2.3

Soit à résoudre le problème avec l'équation de la chaleur suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{c\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 100x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 100(2-x) & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases} \\ u(0, t) = u(2, t) = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Par exemple on prend $k = 0.13$, $c = 0.11$, $\rho = 7.8g/cm^3$, $\Delta x = 0.25$, le pas du temps Δt sera donné par les conditions de stabilité définies par l'équation : $r = \frac{k}{c\rho} \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$. La solution analytique est donnée comme suit :

$$u(x, t) = 800 \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2n+1)^2} \times \cos \frac{\pi(2n+1)(x-1)}{2} \times e^{-0.3738(2n+1)^2 t} \quad (2.53)$$

Dont la représentation de la solution est donnée dans le figure ci dessous.

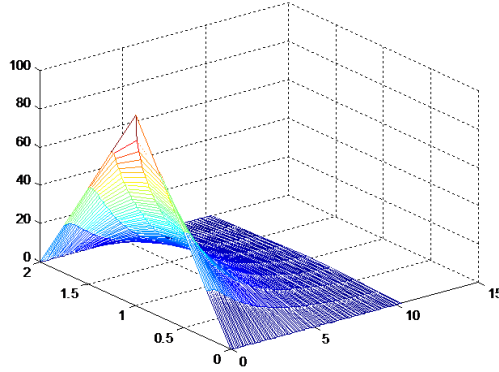


Figure 2.3 : Représentation graphique de la solution analytique $u_{exact}(x_i, t_j)$

Résolution numérique du problème :

1. **Schéma explicite** : D'après (2.31) l'équation du (2.52) s'écrit sous forme

$$u_i^{j+1} = ru_{i+1}^j + (1-2r)u_i^j + ru_{i-1}^j \quad (2.54)$$

* r regroupe les constantes physiques du problème et celles de la discrétisations de l'espace $[a, b]$ et du temps $[0, T_{max}]$.

Pour $j = 0$, $t = 0$ on à :

$$u_i^1 = ru_{i+1}^0 + (1 - 2r)u_i^0 + ru_{i-1}^0 \quad (2.55)$$

L'équation nécessite la connaissance de la condition initiale pour démarrer le processus de résolution. Cette condition n'est autre que $f(x, 0) = f(x_i)$ donnée par l'énoncé du problème.

Le système numérique : Pour j fixé et $i = 1, \dots, n_x - 1$, on obtient un système linéaire de $(n_x - 1)$ équations à $(n_x - 1)$ inconnues suivant :

$$\begin{cases} u_1^{j+1} = ru_2^j + (1 - 2r)u_1^j + ru_0^j \\ u_2^{j+1} = ru_3^j + (1 - 2r)u_2^j + ru_1^j \\ \vdots \\ u_{n_x-1}^{j+1} = ru_{n_x}^j + (1 - 2r)u_{n_x-1}^j + ru_{n_x-2}^j \end{cases} \quad (2.56)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{cases} U^{j+1} = MU^j + N \\ 0 \leq j \leq n_t - 1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Avec

$$M = \begin{pmatrix} 1-2r & r & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ r & 1-2r & r & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & r & 1-2r & r & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & r & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & r & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & r & 1-2r & r \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & r & 1-2r \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} ru_0^j \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ ru_{n_x}^j \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

En utilisant la méthode directe pour résoudre ce système. Voici les courbes obtenues pour $r = \frac{1}{4}$ et $r = 0.625$.

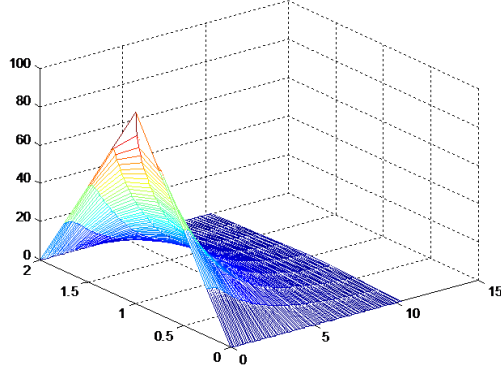


Figure 2.4 : Courbe de la solution numérique, méthode explicite pour $r = \frac{1}{4}$.

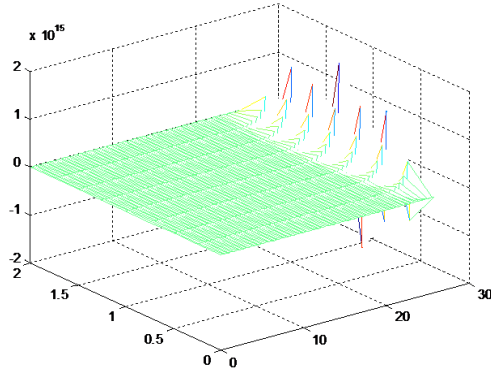


Figure 2.5 : Courbe de la solution numérique, méthode explicite pour $r = 0.625$.

Remarque 2.2.4

Nous avons remarqué, d'après les deux graphes correspondantes à $r < \frac{1}{2}$ et $r > \frac{1}{2}$, que la méthode présente deux régions de stabilité. Si $r < \frac{1}{2}$ la méthode est stable et converge vers la solution analytique. Nous avons une courbe semblable à celle de la solution analytiquement établie. Plus j s'accroît, plus les valeurs du vecteur \vec{u} deviennent nulles. Ce qui est en entier accord avec la solution exacte qui est une série des fonctions convergentes, alors son terme général doit tendre forcément vers 0. Mais si $r > \frac{1}{2}$, la méthode présente des failles et la courbe ne converge même pas. L'allure obtenue dans ce cas est totalement différente à

la solution exacte. Pour avoir un bon résultat dans cette méthode, il faut donc tenir compte de la valeur de r car elle influencera sur le résultat.

Comparaison en fonction de r : Nous voulons comparer graphiquement la méthode numérique explicite (pour $r = 0.25$) avec la solution analytique pour voir comment la solution numérique se rapproche à la solution exacte. Nous combinons le programme de la solution analytique avec celui de la solution numérique directe aux points $x = 0.25$ et $x = 0.75$ pour pouvoir faire la comparaison. Les courbes de comparaison obtenues sont illustrées dans les figures suivantes :

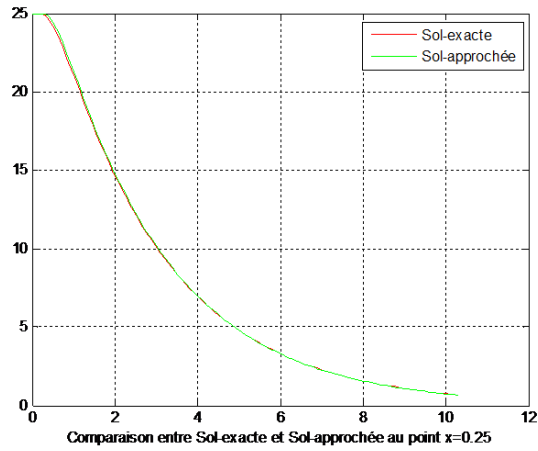


Figure 2.6 : Comparaison graphique de la solution exacte et opprochée pour $r = 0.25$ au point $x = 0.25$.

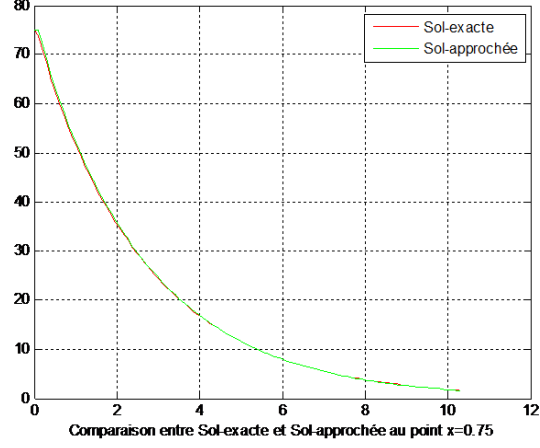


Figure 2.7 : Comparaison graphique de la solution exacte et opprochée pour $r = 0.25$ au point $x = 0.75$.

2. **schéma de Crank - Nicolson (ou méthode implicite)** : D'après le schéma (2.39) on a :

$$\begin{aligned} w_i^{j+1} &= w_i^j + \frac{r}{2}(w_{i+1}^{j+1} - 2w_i^{j+1} + w_{i-1}^{j+1} + w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) \quad (2.59) \\ \Leftrightarrow -ru_{i-1}^{j+1} + (2 + 2r)u_i^{j+1} - ru_{i+1}^{j+1} &= ru_{i-1}^j + (2 - 2r)u_i^j + ru_{i+1}^j \end{aligned}$$

Pour j fixé et i varie, nous obtenons le système linéaire suivant :

$$M_1 U^{j+1} + N_1 = M_2 U^j + N_2 \quad (2.60)$$

Avec :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2+2r & -r & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -r & 2+2r & -r & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -r & 2+2r & -r & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & -r & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -r & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & -r & 2+2r & -r \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -r & 2+2r \end{pmatrix}, N_1 = \begin{pmatrix} -ru_0^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -ru_{n_x}^{j+1} \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

Et la matrice M_2 est semblable à la matrice M_1 , seulement en remplaçant $2 + 2r$ par $2 - 2r$ et $-r$ par r . Le vecteur N_2 est aussi semblable à N_1 , en remplaçant $-r$ par r , u_0^{j+1} par u_0^j et $u_{n_x}^{j+1}$ par $u_{n_x}^j$. D'après (2.60) on peut avoir un système matricielle d'ordre $n_x - 1$ en divisant par M_1 :

$$U^{j+1} = M_1^{-1}(M_2 U^j + (N_2 - N_1)) \quad (2.62)$$

On obtient les courbes de la solution numérique de la méthode de Crank-Nicolson, pour $r < \frac{1}{2}$ et $r > \frac{1}{2}$.

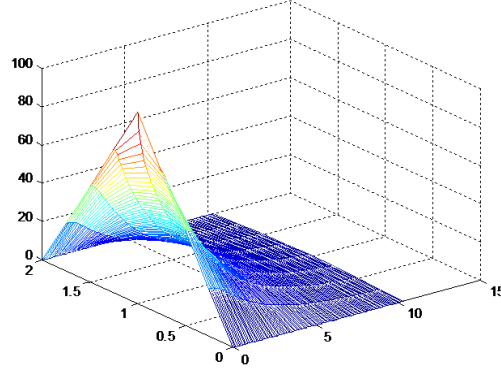


Figure2.8 : Courbe de la solution numérique, méthode implicite pour $r < \frac{1}{2}$ ($r = 0.25$).

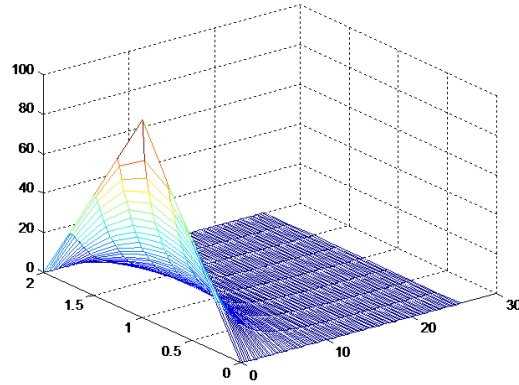


Figure2.9 : Courbe de la solution numérique, méthode implicite pour $r > \frac{1}{2}$ ($r = 0.625$).

Remarque 2.2.5

Nous remarquons que la méthode de Crank - Nicolson est inconditionnellement stable . La méthode converge plus vite vers 0 pour n'importe quelle valeur de r .

2.2.3 Résolution d'une EDP hyperbolique

Problème avec équation du transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.63)$$

Différents schémas pour l'équation du transport :

1. **Schéma explicite** : Les schémas explicites de l'équation du transport sont :

* Schéma explicite décentré à gauche en espace

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} &= -c \left(\frac{u_i^j - u_{i+1}^j}{h_x} \right) \\ \Leftrightarrow u_i^{j+1} &= \left(1 - \frac{ch_t}{h_x}\right) u_i^j + \frac{ch_t}{h_x} u_{i+1}^j \end{aligned} \quad (2.64)$$

* Schéma explicite centré en espace :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} &= -c \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h_x} \right) \\ \Leftrightarrow u_i^{j+1} &= u_i^j - c \frac{h_t}{2h_x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j) \end{aligned} \quad (2.65)$$

* Schéma de **Lax-Friedrichs** : Soit la valeur de u_i^j obtenue à partir (2.12) par

$$u_i^j = \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{2} \quad (2.66)$$

En remplaçant la valeur de u_i^j dans (2.65) on obtient le Schéma de **Lax-Friedrichs** suivant :

$$u_i^{j+1} = \left(\frac{1}{2} - c \frac{h_t}{2h_x} \right) u_{i+1}^j + \left(\frac{1}{2} + c \frac{h_t}{2h_x} \right) u_{i-1}^j \quad (2.67)$$

* Schéma de **Sout-Moutant** :

Prenant les dérivées centrées, par rapport à t et par rapport à x et en remplaçant dans l'équation (2.63) on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2h_t} &= -c \left(\frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h_x} \right) \\ \Leftrightarrow u_i^{j+1} &= u_i^{j-1} - \frac{ch_t}{h_x} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)\end{aligned}\quad (2.68)$$

Un schéma est dit explicites si u_i^{j+1} est calculé explicitement à l'aide de u_i^j .

2. Schéma implicite :

Considérons le schéma implicite décentré à droit en espace :

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{h_t} &= -c \left(\frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h_x} \right) \\ \Leftrightarrow u_i^{j+1} &= u_i^j - \frac{ch_t}{h_x} (u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1})\end{aligned}\quad (2.69)$$

Remarque 2.2.6

Si la relation qui définit le schéma fait intervenir les N valeurs consécutives $u^{j+1}, u^j, \dots, u^{j+1-N}$, le schéma est dit à N pas. Par exemple, le Schéma de Sout-Moutant est un schéma à deux pas alors que tous les autres schémas présentés sont à un pas seulement. Il est à noter que pour les schémas multi pas, la donnée de Cauchy u_i^0 ne suffit plus pour initialiser la méthode. Ainsi, le schéma Saut-Mauton nécessite de connaître $(u_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ et $(u_i^{-1})_{i \in \mathbb{Z}}$, pour le calcul de u_i^j pour $j \geq 2$. Dans ce cas, il est possible de recourir à une méthode à un pas pour évaluer la suite $(u_i^1)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Etude de la convergence, la stabilité et la consistance

* **La stabilité du schéma (2.65)** : Etude de la stabilité au sens de la norme l^2 . Pour étudier la stabilité on introduit la fonction en escalier v^j définie par

$$v^j(x) = v_i^j \quad \text{pour } (i - \frac{1}{2})\Delta x < x < (i + \frac{1}{2})\Delta x \quad (2.70)$$

Le produit scalaire sur L^2 qui est :

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x)dx \quad (2.71)$$

qui coïncide avec le produit scalaire

$$l^2 = \{(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}, \sum_{j=0}^{\infty} |u_j|^2 < +\infty\} \text{ qui est } (u, v) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j v_j \quad (2.72)$$

par conséquent l^2 est isomorphe au sous espace de L^2 des fonctions constantes par morceaux : la fonction v^j peut être assimilée à la suite $(v_i^j)_{i \in \mathbb{Z}}$. D'autre part on dira que le schéma numérique (2.65) est stable au sens de la norme l^2 si :

$$\|v^j\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C \quad \forall j \geq 0 \quad (2.73)$$

avec C constante indépendante de j .

Proposition 2.2.1

Le schéma numérique (2.65) est inconditionnellement instable au sens de la norme l^2 .

Preuve. le schéma pour une fonction de $u \in L^2$ on peut considérer sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-i\xi x} dx \quad (2.74)$$

On rappelle que pour toute fonction $u \in L^2$

$$\mathcal{F}(\tau_a(u))(\xi) = e^{ia\xi} \mathcal{F}(u)(\xi) \quad (2.75)$$

ou $\tau_a(u)(x) = u(x+a)$. D'après (2.70) le schéma numérique (2.65) devient :

$$v_i^{j+1} = v_i^j - \frac{ch_t}{2h_x} (v_{i+1}^j - v_{i-1}^j)$$

Le schéma en variable de Fourier s'écrit alors :

$$\mathcal{F}(v^{j+1})(\xi) = A(\xi) \mathcal{F}(v^j)(\xi) \quad (2.76)$$

Où $A(\xi)$ s'appelle le coefficient d'amplication et vaut

$$A(\xi) = 1 - ic \frac{h_t}{h_x} \sin(h_x \xi) \quad (2.77)$$

Alors $\mathcal{F}(v^j)(\xi) = (A(\xi))^j \mathcal{F}(v^0)(\xi)$. Si $\sin(h_x \xi) \neq 0$ alors $|A(\xi)| > 1$ donc le schéma est numériquement instable car

$$\|v^j\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(v^j)\|_{L^2(\mathbb{R})} \rightarrow \infty \text{ quand } j \rightarrow \infty \quad (2.78)$$

* Stabilité du schéma **Saut-Moutant** : Notion de **CFL**.

■

Proposition 2.2.2

Le schéma numérique **Saut-Moutant** est consistant avec l'équation de transport. Il est stable au sens de la norme L^2 sous la condition **CFL** (**Courant Friedrichs-Lax**)

$$|c| \frac{h_t}{h_x} \leq 1 \quad (\text{la condition } \mathbf{CFL}) \quad (2.79)$$

Preuve. de la stabilité ■

D'après (2.70) le schéma numérique (2.68) devient :

$$v_i^{j+1} = v_i^{j-1} - \frac{ch_t}{h_x} (v_{i+1}^j - v_{i-1}^j) \quad (2.80)$$

En variables de Fourier le schéma s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{F}(v^{j+1})(\xi) \\ \mathcal{F}(v^j)(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2ic \frac{h_t}{h_x} \sin(h_x \xi) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{F}(v^j)(\xi) \\ \mathcal{F}(v^{j-1})(\xi) \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Sous la condition **CFL** les valeurs propres de la matrice sont :

$$\lambda_1 = -ic \frac{h_t}{h_x} \sin(h_x \xi) + \sqrt{1 - c^2 \frac{h_t^2}{h_x^2} \sin^2(h_x \xi)} \quad (2.82)$$

$$\lambda_2 = -ic \frac{h_t}{h_x} \sin(h_x \xi) - \sqrt{1 - c^2 \frac{h_t^2}{h_x^2} \sin^2(h_x \xi)} \quad (2.83)$$

Comme $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ donc la puissance j^{ieme} de la matrice est donc bornée.

(A^j est bornée si et seulement si son rayon spectral $\rho(A) \leq 1$)

(avec $\rho(A) = \max\{|\lambda_k|, \lambda_k \text{ valeur propre de } A\}$).

* Etude du schéma implicite :

Proposition 2.2.3

Le schéma numérique (2.69) est stable au sens de la norme l^2 .

Proposition 2.2.4

Le schéma numérique (2.69) est consistant avec l'équation de transport (2.63).

Problème de Cauchy avec équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.84)$$

Nous utilisons les approximations de Taylor trouvées dans les équations (2.10) pour établir le schéma numérique de cette EDP. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{h_t^2} &= k \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h_x^2} \\ \Leftrightarrow u_i^{j+1} &= \frac{kh_t^2}{h_x^2} (u_{i+1}^j + u_{i-1}^j) + 2(1 - \frac{kh_t^2}{h_x^2}) u_i^j - u_i^{j-1} \end{aligned} \quad (2.85)$$

C'est l'équation numérique de l'équation des ondes. On pose $\frac{kh_t^2}{h_x^2} = 1$, on trouve alors :

$$u_i^{j+1} = u_{i+1}^j + u_{i-1}^j - u_i^{j-1} \quad (2.86)$$

Remarque 2.2.7

Avec les différences finies, l'équation (2.86) est le schéma numérique utilisé pour la résolution de l'équation d'ondes du problème (2.84). Mais, il se pose un problème de mise en œuvre de ce schéma vu que u est connu à $t = t_0 = 0$ qui est la condition initiale. Or, pour calculer u à $t = t_1$, nous devons connaître la valeur de u à $t = t_{-1}$.

problème mixte à équation d'ondes :

Soit le problème :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) \end{cases} \quad (2.87)$$

Connaitre les valeurs de u à $t = t_{-1} = -h_t$ n'est plus un problème quand nous avons des conditions de **Neumann** de type dérivée (condition sur la vitesse de propagation). Ces conditions permettent d'avoir :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} &= \frac{u(x_i, \Delta t) - u(x_i, -\Delta t)}{2\Delta t} = g(x) \\ \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2h_t} &= g_i \Rightarrow u_i^{-1} = u_i^1 - 2h_t g_i \end{aligned} \quad (2.88)$$

Remplaçons la valeur de u_i^{-1} dans l'équation (2.86) on obtient :

$$u_i^1 = \frac{1}{2}(u_{i+1}^0 + u_{i-1}^0) + h_t g_i \quad (2.89)$$

Remarque 2.2.8

C'est avec une condition sur la vitesse, une simplification de l'expression $\frac{kh_t^2}{h_x^2}$ par 1, que nous avons pu résoudre cette équation hyperbolique. Toutefois et malheureusement, ce n'est pas tout le temps pareil et la donnée d'une telle condition de type Neumann n'est pas usuelle. On sera donc souvent bloqué sur la résolution d'une équation hyperbolique si nous nous inspirons seulement de la méthode des différences finies.

Chapitre 3

Résolution numérique par la méthode des éléments finis

Nous abordons dans ce chapitre les idées de base de la méthode des éléments finis au moyen d'un exemple unidimensionnel. La méthode de Galerkin est employée en tant que cadre général. Cette méthode consiste à écrire le problème sous forme variationnelle dont la solution est cherchée dans un espace de Hilbert de dimension infinie. On raisonne alors avec une approximation de dimension finie et on montre que le problème approché correspondant est équivalent à un système linéaire qui s'écrit sous forme $AU = B$ avec U la solution cherchée par cette méthode et les éléments de la matrice A sont obtenus à partir de l'intégration et dérivation des éléments finis choisis. Pour cette méthode, il existe relativement une théorie mathématique connue par le Théorème de Lax-Milgram. Ce théorème permet d'obtenir l'existence et l'unicité d'un problème variationnel sous certaines hypothèses.

3.1 Principe de la méthode

Dans le chapitre *I* nous avons expliqué comment transformer un problème quelconque en un problème variationnel. Moyennant certaines hypothèses sur l'EDP, nous avons ensuite montré l'existence et l'unicité d'une solution de ce problème variationnelle, via le théorème de Lax-Milgram. Mais il s'agit là d'un résultat purement théorique, ne permettant pas de calculer cette solution de manière explicite. Reprenons le problème variationnel général suivant : trouver $u \in V$ tel que pour tout $v \in V$ on ait : $A(u, v) = L(v)$ ou V est un espace de Hilbert, L est une forme linéaire continue sur V et A est une forme bilinéaire continue sur V , de sorte que, d'après le théorème de Lax-Milgram nous savons que ce problème admet une solution unique, noté u dans l'espace V . L'idée de base consiste à résoudre ce problème variationnelle, dans un sous-espace de dimension finie, noté \tilde{V} de V : c'est le principe de la « méthode de Galerkin ». Pourquoi \tilde{V} de dimension finie ? Pour n'avoir qu'un nombre fini d'inconnues qu'on pourra calculer, et en résolvant un système linéaire. D'un point de vue théorique, il est nécessaire que la dimension N de l'espace \tilde{V} est choisie de manière à approcher la solution exacte de manière la plus précise possible.

3.2 Résolution numérique par éléments finis en une dimension :

Soit le problème suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) & x \in]0, 1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

La présentation faite sur cet exemple a pour but de donner les idées de base et ne constitue qu'une première introduction à la méthode des éléments finis. L'approche repose sur la méthode de Galerkin qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un espace de dimension finie.

Soit une fonction $v(x) \in C^1([0, 1])$, nulle en 0 et 1. On peut écrire :

$$\begin{cases} -\int_0^1 u''(x)v(x) = \int_0^1 f(x)v(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

En intégrant par parties, elle devient :

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V \quad (3.3)$$

Avec $V = \{v \in C^1[0, 1], v(0) = v(1) = 0\}$ un sous-espace vectoriel de $C^1([0, 1])$. Une solution de la forme variationnelle (3.3) s'appelle solution faible du problème différentiel de départ.

On cherche alors à écrire un problème approché dans un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit \tilde{V} un sous-espace vectoriel de V de dimension N finie. Soient $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N$, N fonctions linéairement indépendantes de V . Ces fonctions constituent une base du sous-espace \tilde{V} . Ainsi, toute fonction \tilde{u} de \tilde{V} peut se décomposer selon :

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N u_j(x)\phi_j(x) \quad (3.4)$$

Résoudre le problème différentiel de départ revient alors à chercher une solution $\tilde{u} \in \tilde{V}$ telle que :

$$\int_0^1 \tilde{u}(x)\tilde{v}'(x)dx = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \quad (3.5)$$

Prenant $a(\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_0^1 \tilde{u}(x)\tilde{v}'(x)dx$, d'après (1.36) et (1.37) et (1.38) est une

forme bilinéaire continue coercive et $L(\tilde{v}) = \int_0^1 f(x)\tilde{v}(x)dx$, d'après (1.34) et (1.35) est une forme linéaire continue. Donc (3.5) s'écrit sous forme :

$$a(\tilde{u}, \tilde{v}) = L(\tilde{v}) \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V} \quad (3.6)$$

Nous cherchons maintenant une solution approchée \tilde{u} de (3.1) avec (3.6) qui est un problème variationnelle discret associée à (3.1). Il admet une solution unique d'après le Théorème de Lax-Milgram. C'est-à-dire on cherche N réels u_1, u_2, \dots, u_N vérifiant :

$$\sum_{j=1}^N u_j(x) \int_0^1 \phi_j'(x)\phi_i'(x)dx = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx \quad \forall \phi_i \in \tilde{V} \quad (3.7)$$

Soient $A = (a_{ij})$ la matrice de $N \times N$ éléments et $B = (b_i)$ le vecteur à N composantes définies par :

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_j'(x) \phi_i'(x) dx \quad \text{et} \quad b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx \quad (3.8)$$

Par définition, la matrice A est symétrique. Notons U le vecteur des N inconnues u_1, u_2, \dots, u_N . Le problème différentiel se ramène finalement à la résolution du système linéaire :

$$AU = B \quad (3.9)$$

Il reste maintenant à choisir les N fonctions $\phi_i(x)$ pour résoudre ce système.

3.2.1 Choix des fonctions $\phi_i(x)$ éléments finis.

L'intervalle $]0, 1[$ est discrétisé en N points de coordonnées x_i . Les fonctions $\phi_i(x)$ sont choisies comme fonctions polynomiales de degré 1 définies par :

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.10)$$

Ces fonctions sont appelées les éléments finis de degré 1. Avec ces éléments finis, la matrice A est tridiagonale. Il est aussi possible de choisir pour éléments finis des fonctions de degré 2 ou plus.

Le calcul de la matrice A fait intervenir les dérivées $\phi_i'(x)$:

$$\phi_i'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_i-x_{i-1}} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \frac{1}{x_i-x_{i+1}} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.11)$$

D'autre part les fonctions $\phi_i(x)$ sont des fonctions à support $[i-1, i+1]$ car :

$$\begin{cases} \phi_i(x_i) = 1 \\ \phi_i(x_{i-1}) = 0 \\ \phi_i(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Calculons maintenant les éléments de la matrice A tridiagonale et symétrique.

Les trois termes des diagonales sont :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \\ a_{i,i+1} &= \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx = \frac{-1}{x_{i+1} - x_i} \\ a_{i-1,i} &= \int_0^1 \phi'_{i-1}(x) \phi'_i(x) dx = \frac{-1}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Calculons les composantes du vecteur B par la méthode des trapèzes comme suit :

$$b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx = \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right) f_i$$

Le système linéaire à résoudre s'écrit donc, sous forme indicielle :

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} = \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2} \right) f_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (3.14)$$

On constate que la méthode des éléments finis sur une dimension consiste à :

1. Choisir N points entre 0 et 1 et choisir les fonctions $\phi_i(x)$.
2. Construire la matrice A .
3. Déterminer le vecteur B .
4. Résoudre le système linéaire $AU = B$.

Remarque 3.2.1

On cherche la solution par la méthode des éléments finis aux point x_i et entre les points x_i et qui est la propriété associée à la méthode des éléments finis. Contrairement à la méthode de différences finies qui calcule les solutions approchées aux points x_i seulement.

On rappelle la discrétisation avec un schéma aux différences finies d'ordre 2

$$\frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Soit la forme matricielle associée aux différences finies :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h^2 f_1 + u_0 \\ h^2 f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ h^2 f_N + u_{N+1} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

3.2.2 Application numérique :

On choisit comme fonction $f(x) = \sin(\pi x)$. La solution analytique du problème est $u(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$. Notons par un indice u_i la solution analytique et $(u_i)_a$ la solution approché. Divisons l'intervalle $]0, 1[$ en dix segments réguliers de pas $h = 0.1$. Pour la discrétisation de la méthode des éléments finis, on a $N = 9$ noeuds de calculs.

D'après (3.13) on arrive à :

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_{i+1} - x_i} = 20 \\ a_{i,i+1} &= \frac{-1}{x_{i+1} - x_i} = -10 \\ a_{i-1,i} &= \frac{-1}{x_i - x_{i-1}} = -10 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Pour $N = 1$ à 9 , $f_i = \sin(\pi x_i)$ et $h = 0.1$, (3.9) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -10 & 20 & -10 & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & -10 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \ddots & \ddots & -10 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h f_1 \\ h f_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ h f_{N-1} \\ h f_N \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Avec la méthode de Jacobie nous obtenons la solution discrète pour la méthode des éléments finis reportée dans le tableau suivant : ($|er| = |erreur|$)

x_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
u_i	0.0313	0.0596	0.0820	0.0964	0.1013	0.0964	0.0820	0.0596	0.0313
$(u_i)_a$	0.0290	0.0552	0.0759	0.0893	0.0938	0.0893	0.0759	0.0552	0.0290
$ er $	2.310^{-3}	4.410^{-3}	6.110^{-3}	$7.1 \cdot 10^{-3}$	7.510^{-3}	7.110^{-3}	6.110^{-3}	4.410^{-3}	2.310^{-3}

Résultats obtenus par la méthode des éléments finis

Remarque 3.2.2

*On remarque à partir l'erreur que pour la méthode des éléments finis est constante, stable car les erreurs ne s'amplifient pas (trop) au cours du calcul. D'après le **Théorème de Lax**, la méthode est convergent et donne une bonne approximation.*

Discutions

Les EDPs linéaires du second ordre jouent un rôle considérable en mécanique et en physique, exemple : propagation, vibration, mouvements, potentiels,...En générale, il n'est pas possible de trouver une solution exacte d'une telle équation si elle est difficile à résoudre analytiquement, ce qui nous ramène à chercher des solutions particulières ou de solution approchée de ces problèmes et surtout lorsqu'il s'agit d'un problème de Cauchy. Pour cela nous avons donné quelques méthodes numériques qui permettent de résoudre ces problèmes. Ces méthodes sont la méthode de différences finies et la méthode des éléments finis. La première méthode a été appliquée sur les différentes classes d'EDPs d'ordre deux. Or, pour approcher beaucoup plus la solution numérique vers la solution analytique, nous devons faire tendre le pas h de discrétisation vers zéro pour qu'il soit très proche de la limite approximée par la méthode de Taylor, car si la valeur de h est très petite les approximations de Taylor sont presque égales aux dérivées partielles respectives. Il faut donc tenir compte la valeur de h choisie selon le schéma, comme on a trouvé dans le schéma explicite pour l'équation de chaleur, mais pour un schéma implicite on remarque qu'elle est inconditionnellement stable pour n'importe quelle valeur de h . Pour l'EDP de type hyperbolique, nous avons pu résoudre cette équation hyperbolique par les différences finies. Toutefois et malheureusement, nous ne pouvons pas avoir dans tous les cas une telle condition de type Neumann. On sera donc souvent bloqué sur la résolution d'une équation hyperbolique si nous nous inspirons seulement la méthode des différences finies. Ensuite on a abordé une autre méthode numérique dite méthode des éléments finis, connue par la méthode de Galerkin représentée sur un exemple de dimension une. Elle a pour but de donner les idées de base et ne constitue qu'une première introduction à la méthode des éléments finis. Pour une application numérique on remarque que cette méthode est stable et permet de donner une bonne approximation à partir du calcul des inconnues finies associées à la solution approchée aux points de discrétisation et entre ces points.

Conclusion

La recherche d'une solution numérique d'une EDP conduit à l'utilisation des méthodes numériques qui permettent de trouver cette solution, par l'introduction de la notion de schémas aux différences finies. Ces méthodes proviennent de la discrétisation d'opérateur différentiel intervenant dans l'équation, moyennant une hypothèse de régularité de la solution. Les différents schémas que nous choisissons sont acceptables, si les notions de la consistance, la convergence et l'ordre de la précision sont vérifiées car la solution approchée d'un schéma numérique reste peu crédible tant que sa convergence n'a pas été montrée. Cette preuve est sans doute le point le plus délicat de la méthode des différences finies si on ne connaît pas la solution analytique. Nous avons remarqué que pour l'équation des ondes par exemple, la méthode des différences finies posait un problème, et il fallait simplifier certains termes et ajouter une condition supplémentaire (condition de Neumann) et la donnée d'une telle condition n'est pas usuelle. Nous serons souvent bloqués pour la résolution d'une équation hyperbolique si nous utilisons seulement la méthode des différences finies et il fallait trouver une autre méthode pour la résoudre. Par l'introduction de la notion des éléments finis nous trouvons que la solution est donnée avec une bonne approximation. On conclut finalement que pour résoudre un problème quelconque on utilise le modèle (ou la méthode) qui est le mieux adapté pour résoudre ce problème. En plus, ce travail nous a permis de connaître qu'il existe plusieurs méthodes numériques qui permettent d'approcher une équation aux dérivées partielles, ce qui nous conduit à affirmer qu'il n'existe pas une méthode numérique universelle pour approcher la solution exacte.

Bibliographie

- [1] André Fortin et André Garon : cours "Les éléments finis : de la théorie a la pratique ". (1997 – 2011) (page : 30 – 44).
- [2] A.Taik : cours d'analyse numérique " Équations aux Dérivées Partielles Méthodes des Différences Finies ". 2008 (page : 10 – 32 et page 37).
- [3] Brigitte LUCQUIN : " Équations aux dérivées partielles et leurs approximations ". Niveau M1. Ellipses Édition Marketing S.A., 2004.
- [4] DAVEAU CHRISTIAN :cours d' EDP " Approximation des équations aux dérivees partielles par differences finies et volumes finis ". (2010/2011) (page : 20 : 23)
- [5] Eric Goncalvès : cours d'analyse numérique" Résolution numérique, Discretisation des EDP et EDO ". Septembre 2005 (page : 32 – 36).
- [6] Laurent Di Menza : " Analyse numérique des équations aux dérivées partielles ". Cassini, paris, septembre 2009.
- [7] Laurent Signac : cours des méthodes numériques " Systèmes linéaires, Calcul matriciel, Valeurs et vecteurs propres équations différentielles, équations aux dérivées partielles, optimisation, Programmation linéaire et non linéaire ". (2003 – 2004) (page : 45 – 48).
- [8] Michael Schäfer : " Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods ". Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006.

ANNEXE

Exemple : d'équation de Laplace (Résolution par **La méthode directe**)

% (La transformation de la matrice U en un vecteur \vec{v})

for j=1 :ny-1

for i=1 :nx-1

v(k)=u(i,j) ;

k=k+1 ;

end

end

clc ;clear

h1=[5 ;2.5 ;1.25 ;0.625 ;0.3125] ;

for z=1 :length(h1)

h=h1(z)

a=0 ;b=20 ; c=0 ; d=10 ;

nx=(b-a)/h ;ny=(d-c)/h ;n=(nx-1)*(ny-1) ;

%(remplissage des éléments de la matrice A)

A=zeros(n) ;

for i=1 :(n-1)

A(i,i)=-4 ;

A(i+1,i)=1 ;

A(i,i+1)=1 ;

if (mod(i,(nx-1))==0)

A(i+1,i)=0 ;

A(i,i+1)=0 ;

end

end

for i=1 :n-nx+1

A(nx-1+i,i)=1 ;

A(i,nx-1+i)=1 ;

end


```

A(n,n)=-4;
% (remplissage des éléments de la matrice B)
for i=1 :n
B(i)=0;
if (mod(i,nx-1)==0)
B(i)=-100;
end
end
% (résolution du système Av=B et transformation du vecteur v en la matrice
U).
V = A\B';
k=1;
for j=1 :ny-1
for i=1 :nx-1
u(j,i)=V(k);
k=k+1;
end
end
%(décalage des éléments pour insérer les conditions aux limites)
for j=ny :-1 :2
for i=nx :-1 :2
u(j,i)=u((j-1),(i-1));
end
end
for i=1 :nx
for j=1 :ny
u(1,i)=0;
u(j,1)=0;
u(ny+1,i)=0;
u(j,nx+1)=100;
end
end
u(1,nx+1)=0;

```

```

%(les vecteurs x et y)
x=0 :h :b ; y=0 :h :d ;
%(affichage la courbe en tenant compte des vecteurs x,y et de la matrice U)
title(' h = ');
subplot(2,3,z),
mesh(x,y,u)
end
*****

Résolution par La méthode de relaxation
*****

clear ; clc ;
h1=[5 ;2.5 ;1.25 ;0.625 ;0.3125 ;0.15625] ;
for z=1 :length(h1)
h=h1(z)
a=0 ; b=20 ;c=0 ; d=10 ;nx=(b-a)/h ;ny=(d-c)/h ;
c=cos(pi/nx)+cos(pi/ny) ;w=4./(2+sqrt(4-c.*c)) ;
u=zeros(ny+1,nx+1) ;
v=zeros(ny+1,nx+1) ;
for j=2 :ny
u(j,nx+1)=100 ;
end
while (norm(u-v)<=1e-6)
v=u ;
for j=2 :nx
for i=2 :ny
u(i,j)= u(i,j)+w./4*(u(i+1,j)+u(i-1,j)+u(i,j+1)+u(i,j-1)) ;
end
end
end
% les vecteurs x et y
x=0 :h :b ; y=0 :h :d ;
%(affichage la courbe en tenant compte des vecteurs x,y et de la matrice U)
title('h =') ;

```

```

subplot(2,3,z),
mesh(x,y,u)
end
*****

```

Exemple : d'équation de la chaleur (Représentation de la solution analytique)

```

*****

clc ; clear ;
k=0.13 ; c=0.11 ; p=7.8 ; dx=0.25 ; r=0.25 ;
dt=dx*dx*c*p*(r/k) ; Tmax=100*dt ;
%(Nous avons fait Tmax un multiple de dt pour qu'en le divisant par dt, nt
soit toujours un entier, car sinon le programme ne compilera pas)
cla=0 ; clb=0 ; a=0 ; b=2 ; nx=(b-a)/dx ; nt=Tmax/dt ;
x=0 :dx :b ; t=0 :dt :Tmax ;
%(la solution analytique pour l'équation de la chaleur)
v=zeros(nx+1,nt+1) ;
n=0 ;
while(n<=100)
for i=1 :nx+1
for j=1 :nt+1
u(i,j)=v(i,j)+800*(pi^2*(2*n+1)^2)*cos(pi*(2*n+1)*(x(i)-1)/2)*exp((-
0.3738)*(2*n+1)^2*t(j)) ;
v(i,j)=u(i,j) ;
end
end
n=n+1 ;
end
mesh(t,x,v)
*****

```

La solution numérique de la méthode explicite : Le programme suivant calcule les valeurs du vecteur \vec{u} , remplacé par le vecteur \vec{h} dans le programme, pour pouvoir lier le programme avec le premier calculant. Les éléments de la matrice v pour la solution exacte, à chaque instant j et qui les stocke dans

une matrice w , en commençant par les valeurs initiales. Pour avoir la courbe du deuxième cas, il suffit de remplacer r par 0.625. u_0^j Elle notée par cla , et $u_{n_x}^j$ notée clb .

```
*****
```

```
clc; clear;
k=0.13;c=0.11;p=7.8;dx=0.25;
r=0.25;dt=dx*dx*c*p*r/k;
Tmax=100*dt;a=0;b=2;
cla=0;clb=0;
nx=(b-a)/dx;nt=Tmax/dt;
x=0:dx:b;t=0:dt:Tmax;
for i=1:nx-1
N(i)=0;
end
N(1)=r*cla;
N(nx-1)=r*clb;
for i=1:nx-2
M(i,i)=1-2*r;
M(i,i+1)=r;
M(i+1,i)=r;
end
M(nx-1,nx-1)=1-2*r;
for i=1:nx+1
if x(i) < 1
Ci(i)=100*x(i);
else
Ci(i)=100*(2-x(i));
end
end
for i=1:nx-1
h(i)=Ci(i+1);
end
j=1;
```

```

h=h';
while(j < nt + 2)
for i=1 :nx-1
w(i,j)=h(i);
end
h=M*h+N';
j=j+1;
end
for i=nx :-1 :2
for j=nt+1 :-1 :1
w(i,j)=w(i-1,j);
end
end
for j=1 :nt+1
w(1,j)=0;
w(nx+1,j)=0;
end
mesh(t,x,w);
*****

```

La comparaison entre la solution analytique et la solution numérique ou point 0.25 et 0.75 pour r=0.25

```

*****
Sexa=v(2, :);
Sapr=w(2, :);
plot(t,Sexa,'r',t,Sapr,'g');
xlabel('Comparaison entre Sol-exacte et Sol-approchée au point x=0.25')
legend('Sol-exacte','Sol-approchée')
grid
Sexa=v(4, :);
Sapr=w(4, :)
figure(2)
plot(t,Sexa,'r',t,Sapr,'g');
legend('Sol-exacte','Sol-approchée')

```

```

xlabel('Comparaison entre Sol-exacte et Sol-approchée au point x=0.75')
grid
*****

La solution numérique de la méthode de Crank-Nicolson (Pour avoir
la courbe du deuxième cas, il suffit de remplacer  $r$  par 0.625)
*****

clc ; clear ;
k=0.13 ; c=0.11 ;
p=7.8 ; dx=0.25 ; r=0.25 ;
dt=dx*dx*c*p*r/k ; Tmax=100*dt ;
a=0 ; b=2 ; cla=0 ; clb=0 ;
nx=(b-a)/dx ; nt=Tmax/dt ;
x=0 :dx :b ; t=0 :dt :Tmax ;
for i=1 :nx-1
    N1(i)=0 ;
    N2(i)=0 ;
end
N2(1)=-r*cla ;
N2(nx-1)=-r*clb ;
for i=1 :nx-2
    M1(i,i)=2+2*r ;
    M1(i,i+1)=-r ;
    M1(i+1,i)=-r ;
    M2(i,i)=2-2*r ;
    M2(i,i+1)=r ;
    M2(i+1,i)=r ;
end
M1(nx-1,nx-1)=2+2*r ;
M2(nx-1,nx-1)=2-2*r ;
for i=1 :nx+1
    if x(i)<1
        Ci(i)=100*x(i) ;
    else

```

```

Ci(i)=100*(2-x(i));
end
end
for i=1 :nx-1
h(i)=Ci(i+1);
end
j=1;
h=h';
I=eye(nx-1)
while(j<nt+2)
for i=1 :nx-1
w(i,j)=h(i);
end
h=(M1\I)*(M2*h+(N2'-N1')));
j=j+1;
end
for i=nx :-1 :2
for j=nt+1 :-1 :1
w(i,j)=w(i-1,j);
end
end
for j=1 :nt+1
w(1,j)=0;
w(nx+1,j)=0;
end
mesh(t,x,w);
*****

```